

LA DERIVATION

A) Dérivation en un point et Dérivé à droite et dérivé à gauche.

1) f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre a .

f est dérivable en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et

est finie le note $f'(a)$: Le nombre dérivé de la fonction f en a

2) f est dérivable en a ssi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ Finie}$$

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r > 0$

f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

existe et est finie : $f'_d(a)$

2) f une fonction définie sur un intervalle de la forme] $a-r, a]$ où $r > 0$

f est dérivable à gauche de a si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie : } f'_g(a)$$

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a .

f est dérivable en a ssi elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

4) Toute fonction dérivable en a est continue en a .

B) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) si f est dérivable en a . f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

2) Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en

$$A(a, f(a)) \text{ d'équation : } (T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

3) Si f est dérivable à droite de a , alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$$(T_d): y = f'_d(a)(x - a) + f(a) : x \geq a$$

4) Si f est dérivable à gauche de a , alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$$(T_g): y = f'_g(a)(x - a) + f(a) : x \leq a$$

5) Si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ on dit que la courbe représente un point anguleux en $A(a, f(a))$

C) Dérivabilité sur un intervalle.

1) f est dérivable sur l'ouvert] $a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$

2) f est dérivable sur le semi-ouvert $]a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a

3) f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

D) Monotonie et extremums d'une fonction : concavité ; points d'inflexions

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$

2) Si f est dérivable en a et admet un extremum en a , alors sa courbe représentative

admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

3) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

4) a) f' est positive sur I ssi f est croissante sur I .

b) f' est négative sur I ssi f est décroissante

c) f' est nulle sur I ssi f est constante sur I .

5) Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

6) Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement négatif sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement décroissante sur I

7) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

8) f est deux fois dérivable sur un intervalle I .

a) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I .

b) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I .

c) Si f'' s'annule en a en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

à suivre : Formulaire de dérivées

Formulaire de dérivées

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*
$x^n, n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	\mathbb{R} si $n \geq 1$, \mathbb{R}^* si $n \leq -1$	\mathbb{R} si $n \geq 1$, \mathbb{R}^* si $n \leq -1$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}

Dérivées et opérations

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I , $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- Si f est dérivable sur I et si λ est un réel, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I , $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f'g + fg'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Si f est dérivable sur I , si g est dérivable sur J et si pour tout x de I , $f(x) \in J$, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.
Cette dernière formule fournit en particulier le tableau suivant :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$f^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nf'f^{n-1}$	en tout réel où f est dérivable
$1/f$	$-\frac{f'}{f^2}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
$\frac{1}{f^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{nf'}{f^{n+1}}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
$f^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$nf'f^{n-1}$	
\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
e^f	$f'e^f$	en tout réel où f est dérivable
$\ln(f)$	$\frac{f'}{f}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
$\sin(f)$	$f' \cos(f)$	en tout réel où f est dérivable
$\cos(f)$	$-f' \sin(f)$	en tout réel où f est dérivable